b) $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow f^{-1}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2}$

2) a) f est dérivable sur $[0,1[$

et $f'(x) = \frac{\pi}{2}.\cos(\frac{\pi}{2}x) \neq 0 \forall x \in [0,1[$

d'où f^{-1} est dérivable sur $f([0,1[) = [0,1[$

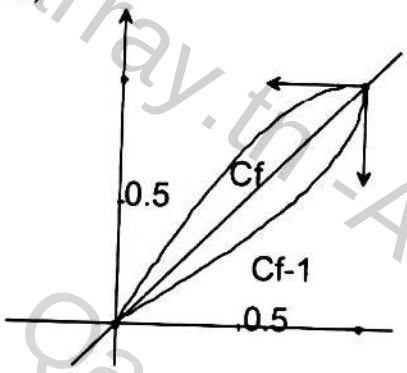
b) $(f^{-1})'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{1}{2}))} = \frac{1}{f'(\frac{1}{3})} = \frac{4}{\pi.\sqrt{3}}$

c) $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)}$ (avec $y=f^{-1}(x)$; $f(y)=x$)

$= \frac{2}{\pi\cos(\frac{\pi}{2}.y)} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-\sin^2(\frac{\pi}{2}y)}}$ (car $\cos(\frac{\pi}{2}y) > 0$)

$= \frac{2}{\pi.\sqrt{1-f^2(y)}} = \frac{2}{\pi.\sqrt{1-x^2}}$

3)



4) $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$

a) pour $1 \leq k \leq n$

$\frac{1}{n^2} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow f(\frac{1}{n^2}) \leq f(\frac{k}{n^2}) \leq f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n^2}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n^2}) \leq V_n \times n \leq \sum_{k=1}^{n} f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow n.f(\frac{1}{n^2}) \leq n.V_n \leq n.f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow f(\frac{1}{n^2}) \leq V_n \leq f(\frac{1}{n})$

b) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0^+$ f est continue en 0 à droite

d'où $\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0) = 0$

de meme : $\lim_{n\to+\infty} f(\frac{1}{n^2}) = 0$

d'où $\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$

5) on pose $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - \frac{\pi}{2}.x$

φ est dérivable sur $]0,1[$

$\varphi'(x) = -\left[\frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{\pi}{2}\right] < 0$

φ est continue et strictement décroissante sur $]0,1[$

elle réalise donc une bijection de $]0,1[$

sur $\varphi(]0,1[) =]\lim_1 \varphi, \lim_{1^-} \varphi[=]1-\frac{\pi}{2}, +\infty[$

comme $0 \in]1-\frac{\pi}{2}, +\infty[$ *,alors* il existe un unique réel

α tq $\varphi(\alpha)=0$

par suite l'équation : $\frac{1}{f(x)} = \frac{\pi}{2}x$ admet α comme

unique solution dans $]0,1[$

$\varphi(\frac{1}{2}) = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$

$\varphi(]\frac{1}{2},1[) =]1-\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}-\frac{\pi}{4}[$

comme $0 \in \varphi(]\frac{1}{2},1[)$ alors $\alpha \in]\frac{1}{2},1[$

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn